Fuzzy-Systeme WS 2006/2007

Prof. Dr. R. Kruse, F. Rügheimer

Übungsaufgaben: Blatt 4

Aufgabe 11 Generatorfunktionen

Beweisen Sie, dass die von einer beliebigen (wachsenden) Generatorfunktion induzierte T-Norm, T-Konorm und Fuzzy-Negation ein duales Tripel bilden.
Hinweis: Da die induzierten Fuzzy-Negationen involutiv sind, reicht es aus, nur eine der beiden Bedingungen für die Dualität zu zeigen, da o.B.d.A. gilt:

$$\begin{array}{rrcll} & \sim\top(a,b) & = & \perp(\sim a, \sim b) & \\ \Leftrightarrow & \sim\sim\top(a,b) & = & \sim\perp(\sim a, \sim b) & \\ \Leftrightarrow & \top(\sim\sim a, \sim\sim b) & = & \sim\perp(\sim a, \sim b) & \quad \text{ersetze } \sim a = a', \sim b = b' \\ \Leftrightarrow & \top(\sim a', \sim b') & = & \sim\perp(a', b'). & \end{array}$$

Aufgabe 12 Fuzzy-Implikation

Für die Fuzzy-Implikation I lassen sich ähnlich zu den anderen Fuzzy-Operationen Axiome aufstellen, die in der klassischen Logik gelten und deren Erfüllung man sich von einer Implikation in der mehrwertigen Logik wünscht. Folgende Axiome werden dabei üblicherweise aufgestellt.

1) Wenn $a \leq c$, dann $I(a,b) \geq I(c,b)$.
2) Wenn $b \geq c$, dann $I(a,b) \geq I(a,c)$.
3) $I(0,b) = 1$ (ex contradictio quodlibet: aus Falschem folgt Beliebiges).
4) $I(1,b) = b$ (eine Tautologie kann nichts begründen).
5) $I(a,b) \geq b$ (entspricht der Tautologie $q \to (p \to q)$).
6) $I(a,a) = 1$ (Identitätsprinzip).
7) $I(a, I(b,c)) = I(b, I(a,c))$ (Austauschprinzip).
8) $I(a,b) = 1$ genau dann, wenn $a \leq b$ (eine Implikation definiert eine Ordnung).
9) $I(a,b) = I(\sim b, \sim a)$ für eine (starke, d.h. strikte und involutive) Negation $\sim$ (Kontraposition).
10) I ist eine stetige Funktion.

In der Vorlesung wurden verschiedene Fuzzy-Implikationen vorgestellt, von denen die Łukasiewicz-Implikation $I_{\text{Łuka}}(a,b) = \min(1, 1-a+b)$ als einzige alle 10 Bedingungen erfüllt.
Beweisen oder widerlegen Sie, dass die Bedingungen 5 und 9 für die folgenden Fuzzy-Implikationen gelten:

- $I_{\text{Zadeh}}(a,b) = \max(1-a, \min(a,b))$ und
- $I_{\text{Gödel}}(a,b) = \begin{cases} 1, & \text{falls } a \leq b, \\ b, & \text{sonst.} \end{cases}$

Aufgabe 13 Fuzzy-Mengenoperationen

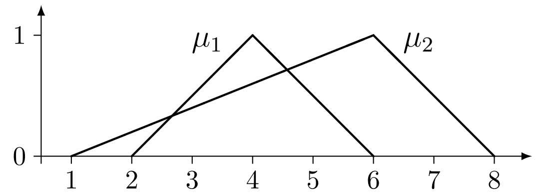
Neben Schnitt, Vereinigung und Komplement können auch andere Mengenoperationen auf Fuzzy-Mengen erweitert werden. Eine Möglichkeit, die Teilmengenbeziehung zu definieren, verwendet die Implikation. Es seien A, B Teilmengen von X. Dann gilt

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in X : x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Bei der Erweiterung auf Fuzzy-Mengen stellen wir den Allquantor durch das Infimum und die Implikation durch I_{Luka} dar. Es seien μ, ν Fuzzy-Mengen aus $F(X)$. Dann ist die *Teilmengigkeit* definiert als

$$\begin{aligned} &\subseteq : F(X) \times F(X) \to [0,1] \\ &\mu \subseteq \nu = \inf_{x \in X} \{\min(1, 1 - \mu(x) + \nu(x))\} \end{aligned}$$

Betrachten Sie die folgenden Fuzzy-Mengen:



Berechnen Sie den Grad, zu dem μ_1 eine Teilmenge von μ_2 ist. Überlegen Sie, ob diese Definition der Teilmengigkeit mit Ihrer Intuition übereinstimmt.

Aufgabe 14 α-Schnitte

Bestimmen Sie die Menge der $\alpha - \textit{Schnitte}$ für

a) die beiden Fuzzy-Mengen aus Aufgabe 13

b) die Fuzzy-Menge mit der folgenden Definition:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 - (x-2)^2, & \text{falls } x \in [1,3], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$