Fuzzy-Systeme WS 2006/2007
Prof. Dr. R. Kruse, F. Rügheimer

Übungsaufgaben: Blatt 8

Aufgabe 27 Linguistische Variablen

Durch die Diskussion um mögliche gesundheitliche Folgen übermäßigen Süßwarenkonsums aufgeschreckt, will der Nikolaus dieses Jahr, zusätzlich zum altbekannten „Saubere-Schuhe-Kriterium“, den Ernährungszustand seiner Klientel in die Berechnung der jeweils zu verteilenden Süßigkeitenmenge einfließen lassen.

In den letzen Tagen hat er daher viel Zeit mit der Überarbeitung seiner hierfür verwendeten Faustregeln verbracht. Dabei ist Nikolaus auch auf die Idee gekommen, sich künftig von seinem neuen japanischen Roboter-Haustier unterstützen zu lassen.

Im beiliegenden Handbuch hat er erfahren, dass dieses mit Fuzzy-Logik arbeitet. Um seine in natürlicher Sprache notierten Regeln einzuprogrammieren, benötigt er nun linguistische Variablen für die Größen:

- Sauberkeit der Schuhe,
- Grad der Übergewichtigkeit,
- Süßigkeitenmenge.

Finden Sie linguistische Variablen, mit denen sich diese Konzepte beschreiben lassen. Denken Sie auch daran, dass Nikolaus in seinen Regeln Ausdrücke wie „sehr viel mehr als 5 Süßigkeiten“, „einigermaßen saubere Schuhe“ und logische Verknüpfungen wie in „leicht übergewichtig oder bis zu 1.3-faches Normalgewicht“ verwenden möchte.

Hinweis: Als Grundmenge für das Konzept Übergewicht bietet sich zum Beispiel der Quotient aus tatsächlichem Gewicht und empfohlenem Maximalgewicht an.

Aufgabe 28 Fuzzy-Relationen

Eine Fuzzy-Relation $\underset{\sim}{R}$ sei definiert auf den Mengen $X_1 = \{a, b, c\}$, $X_2 = \{s, t\}$, $X_3 = \{x, y\}$ und $X_4 = \{i, j\}$.
$\mu_{\underset{\sim}{R}}$ sei an folgenden Stellen von 0 verschieden:

$$\mu_{\underset{\sim}{R}}(a,t,y,j) = 0.2, \quad \mu_{\underset{\sim}{R}}(b,s,x,j) = 0.5, \quad \mu_{\underset{\sim}{R}}(a,s,y,j) = 1.0,$$
$$\mu_{\underset{\sim}{R}}(a,s,y,i) = 0.9, \quad \mu_{\underset{\sim}{R}}(b,t,y,i) = 0.7, \quad \mu_{\underset{\sim}{R}}(c,s,y,j) = 0.3.$$

(a) Bestimmen Sie die folgenden Projektionen von $\underset{\sim}{R}$:
$\underset{\sim}{R}_{1,2,4} = \text{proj}_{\{X_1,X_2,X_4\}}^{\{X_1,X_2,X_3,X_4\}}(\underset{\sim}{R})$,
$\underset{\sim}{R}_{1,3} = \text{proj}_{\{X_1,X_3\}}^{\{X_1,X_2,X_3,X_4\}}(\underset{\sim}{R})$ und
$\underset{\sim}{R}_{4} = \text{proj}_{\{X_4\}}^{\{X_1,X_2,X_3,X_4\}}(\underset{\sim}{R})$.

(b) Bestimmen Sie anschließend die zylindrischen Erweiterungen
$\text{cext}_{\{X_1,X_2,X_4\}}^{\{X_1,X_2,X_3,X_4\}}(\underset{\sim}{R}_{1,2,4})$,
$\text{cext}_{\{X_1,X_3\}}^{\{X_1,X_2,X_3,X_4\}}(\underset{\sim}{R}_{1,3})$ und
$\text{cext}_{\{X_4\}}^{\{X_1,X_2,X_3,X_4\}}(\underset{\sim}{R}_{4})$.

Aufgabe 29 Fuzzy-Relationen

Zeigen Sie, dass nicht jede Fuzzy-Relation $\underset{\sim}{R}$ auf $X \times Y$ das kartesische Produkt zweier Fuzzy-Mengen A von X und B von Y ist.

Aufgabe 30 Anwendung von Fuzzy-Relationen

Betrachten Sie Fahrzeuge und eine Trägermenge von Geschwindigkeitsangaben in km/h, $X = \mathbb{R}^+$. Wir gehen davon aus, dass ein Auto mit einer Geschwindigkeit von $\underset{\sim}{V}$=„etwa 60 km/h“ fährt, was durch eine dreiecksförmige Fuzzy-Menge (50,60,70), d.h

$$\mu_{\underset{\sim}{V}}(x) = \begin{cases} \frac{x}{10} - 5 & \text{falls } x \in [50, 60) \\ 7 - \frac{x}{10} & \text{falls } x \in [60, 70] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

dargestellt wird. Geben Sie Zugehörigkeitsfunktionen von Fuzzy-Mengen an, welche die Geschwindigkeiten der folgenden Fahrzeuge charakterisieren:

(a) ... von Motorrädern, mit einer Geschwindigkeit „zwischen $\underset{\sim}{V}$ und $2 \cdot \underset{\sim}{V}$“.

(b) ... von LKWs, deren Geschwindigkeit als „deutlich langsamer als $\underset{\sim}{V}$“ beschrieben wird. Das Konzept „deutlich langsamer als“ wird dabei durch die Fuzzy-Relation $\underset{\sim}{R}$ ausgedrückt, mit

$$\mu_{\underset{\sim}{R}} = \begin{cases} 1, & \text{falls } y \leq x - 20 \\ \frac{x-y}{20}, & \text{falls } x - 20 < y < x \\ 0, & \text{falls } x \leq y. \end{cases}$$

$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x, y)$ gibt also den Erfüllungsgrad der Aussage „y ist deutlich langsamer als x“ an.

Hinweis (Inferenzprinzip): Gegeben seien eine Fuzzy-Set $\underset{\sim}{\mathrm{A}}$ über X mit der Zugehörigkeitsfunktion $\mu_{\underset{\sim}{\mathrm{A}}}$ und eine Fuzzy-Relation $\underset{\sim}{\mathrm{R}}$ über $X \times Y$, deren Zugehörigkeitsfunktion durch $\mu_{\underset{\sim}{\mathrm{R}}}$ gegeben ist. Das Inferenzprinzip erlaubt es nun eine Fuzzy-Menge $\underset{\sim}{\mathrm{B}}$ über Y abzuleiten, die mit $\underset{\sim}{\mathrm{A}}$ über $\underset{\sim}{\mathrm{R}}$ assoziiert ist:

$$\forall y \in Y,\ \mu_{\underset{\sim}{\mathrm{B}}}(y) = \sup_{x \in X} \min(\mu_{\underset{\sim}{\mathrm{R}}}(x, y), \mu_{\underset{\sim}{\mathrm{A}}}(x)).$$