Verbundbäume und Maximale Cliquen

Proseminar: Algorithmen auf Graphen
Sommersemester ‘06

Norman Krell

Gliederung

1. Cliquenproblem
   1. Allgemeines
   2. Algorithmen
   3. Implementation
2. Hypergraphen
   1. Begriffe
   2. Eigenschaften
   3. Standard-Hypergraphen
3. Anwendungen
4. Quellen
5. Fragen

Cliquenproblem

Cliquenproblem
- Allgemeines
- Algorithmen
- Implementation

Hypergraphen
Anwendungen
Quellen
Fragen

- eng verwandt mit:
  - Independent Set
  - Vertex Cover
- NP-vollständig, NP-schwer
- Keine „guten“ Approximationsalgorithmen bekannt

Cliquenproblem

Cliquenproblem
Allgemeines
Algorithmen
Implementation
Hypergraphen
Anwendungen
Quellen
Fragen

Lösungsstrategie: Brute Force.

- keine Cliquen suchen deren Größe den max. Knotengrad übersteigt
- Knoten mit Grad < Cliquengröße können gelöscht werden

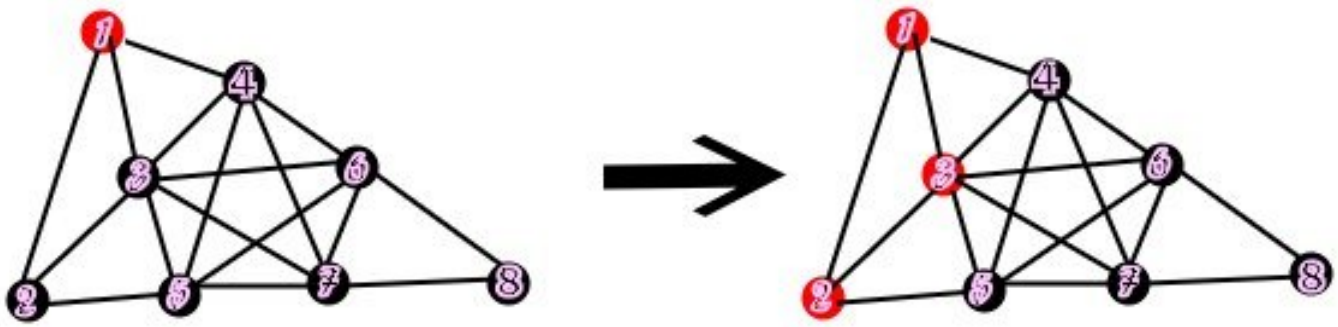
Verbesserungen

Cliquenproblem
Allgemeines
Algorithmen
Implementation
Hypergraphen
Anwendungen
Quellen
Fragen

- Heuristik: finden von mindestens *einer maximalen Clique*:

Knoten ist Clique mit Größe 1.

also Cliquen vermischen, wenn Resultat Clique ist


1
4
3
6
2
5
7
8
1
4
3
6
2
5
7
8

Implementation

Cliquenproblem
Allgemeines
Algorithmen
Implementation
Hypergraphen
Anwendungen
Quellen
Fragen

- Effektive Implementation mit Disjoint-set Datenstruktur:
  - Für jede Menge ein Baum (linked List bei einfacher, suboptimaler implementation)
  - MakeSet: erstellt eine 1-elementige Menge
  - Find: findet die Menge in der ein Knoten ist
  - Union: vereinigt 2 Mengen:

Implementation

Cliquenproblem
Allgemeines
Algorithmen
Implementation
Hypergraphen
Anwendungen
Quellen
Fragen

- Find-Verbesserung – Path compression:
  Wird Find ausgeführt, wird jeder auf dem Weg besuchte Knoten an die Wurzel gehängt

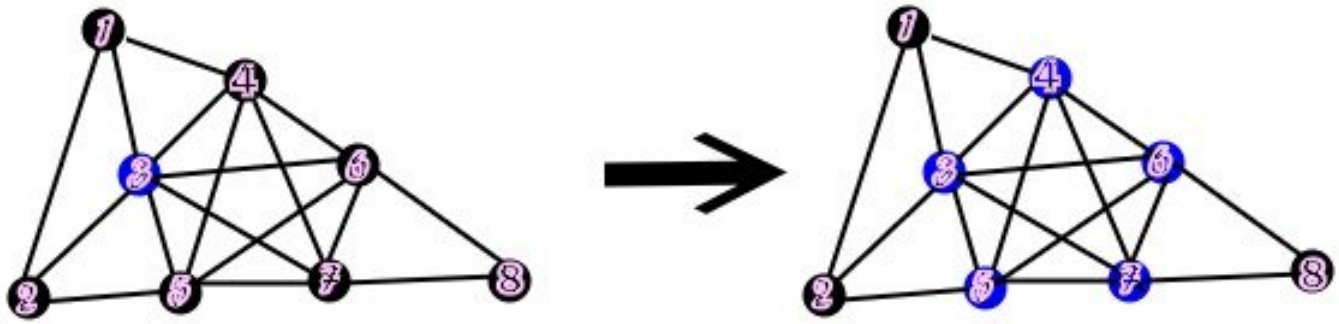
- Union-Verbesserung - Union by rank:
  Hängt die kleinere Menge von beiden an die Größere an

Cliquenproblem

Cliquenproblem
Allgemeines
Algorithmen
Implementation
Hypergraphen
Anwendungen
Quellen
Fragen

Variationen:

- Knoten nach Grad sortieren und mit absteigendem grad versuchen zu mischen
- Zufällig Knoten wählen, konstante Anzahl an Versuchen durchführen, bestes Resultat verwenden


1
4
3
6
2
5
7
8
1
4
3
6
2
5
7
8

Hypergraphen

Cliquenproblem
Hypergraphen
Begriffe
Eigenschaften
Standard-Hypergraphen
Anwendungen
Quellen
Fragen

Definition:

- Ungerichtete Graphen
- Kanten verbinden beliebig viele Knoten

G=(V,H) ist ein endlicher Hypergraph, wenn gilt:

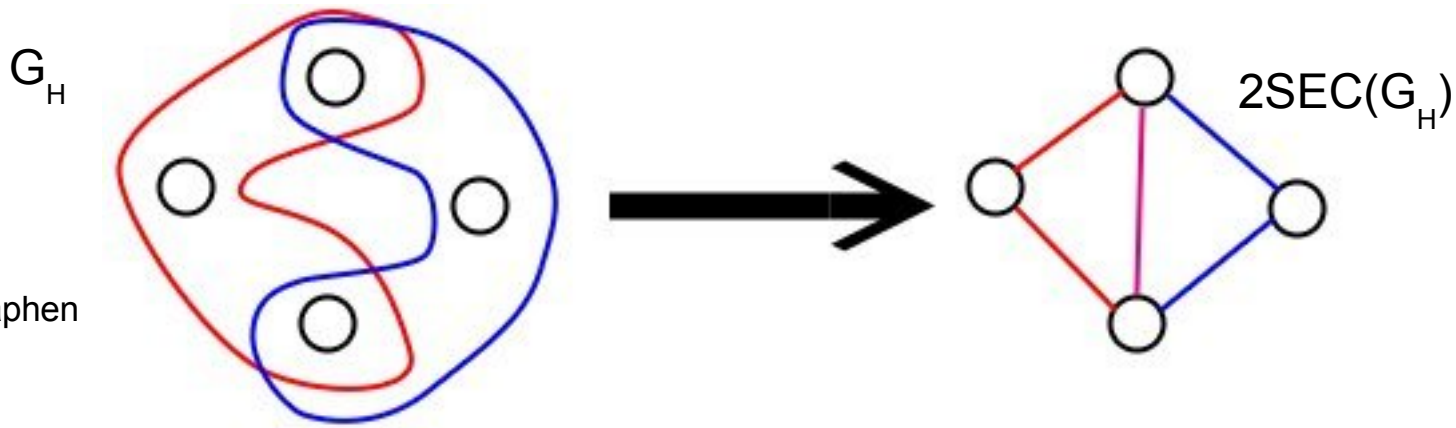
Knotenmenge V ist endlich

Die Menge der Hyperkanten H ist eine Menge von beliebigen Teilmengen aus V

Hypergraphen

Cliquenproblem
Hypergraphen
- Begriffe
- Eigenschaften
- Standard-Hypergraphen

Anwendungen
Quellen
Fragen



- 2-Section-Graph

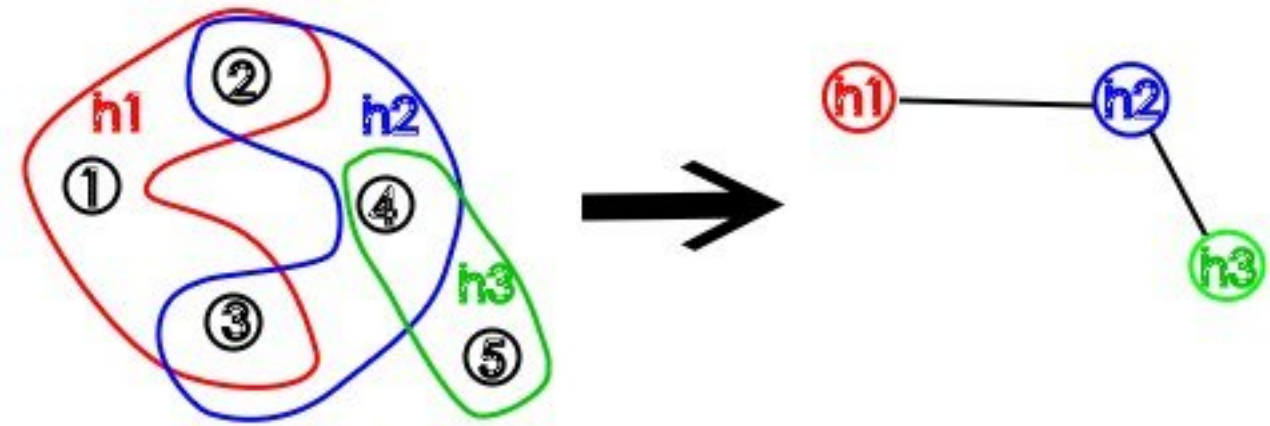
$2SEC(G_H(V,H))$ ist Graph $G(V,E)$, mit

genau dann, wenn ein h aus H ab enthält

Hypergraphen

Cliquenproblem
Hypergraphen
- Begriffe
- Eigenschaften
- Standard-Hypergraphen

Anwendungen
Quellen
Fragen



- Line Graph

$L(G_H(V,H))$ ist Graph $G(H,E)$, mit der Eigenschaft:

G ist Durchschnittsgraph von H,

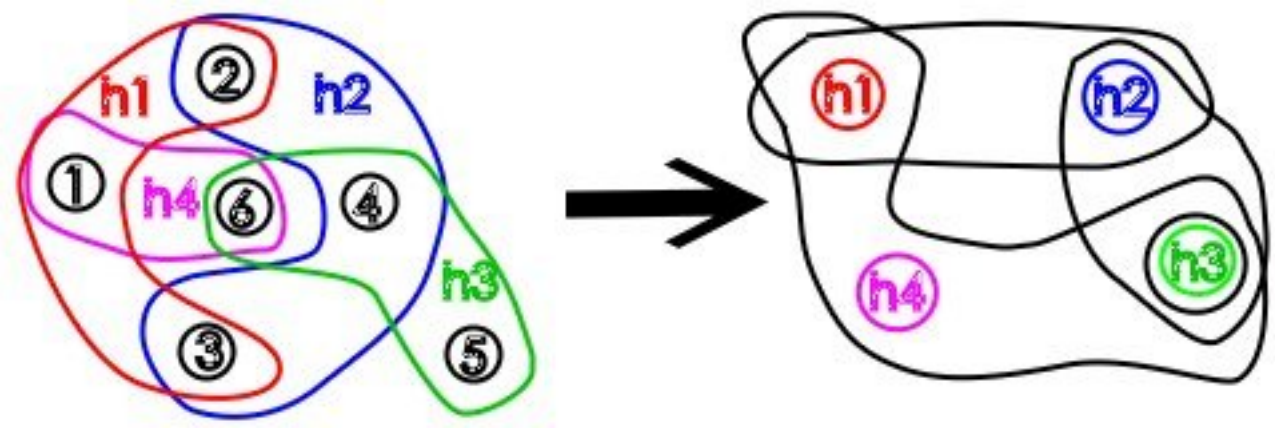
d.h. $ab \in E \Leftrightarrow a \cap b \neq \emptyset$

für alle Paare verschiedener $a, b \in H$

Hypergraphen

Cliquenproblem
Hypergraphen
- Begriffe
- Eigenschaften
- Standard-Hypergraphen

Anwendungen
Quellen
Fragen



- **Dualer Hypergraph**

zu $G_H(V,H)$ dualer Hypergraph $G_H^* = (H,H^*)$

nat Knoten H bestehend aus Hyperkanten und

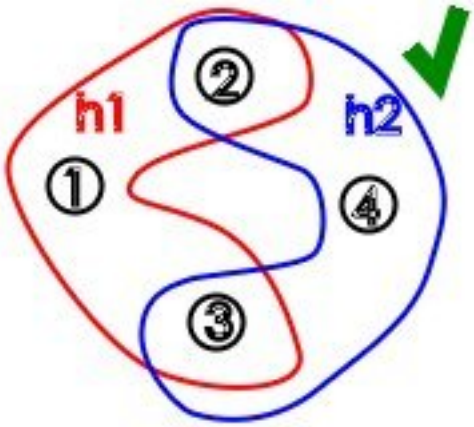
hat Hyperkanten H* bestehend aus

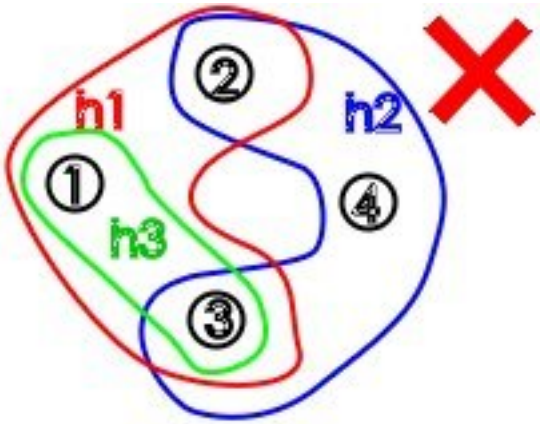
Hyperkanten aus G_H, die Knoten gemeinsam haben

Hypergraphen

Cliquenproblem
Hypergraphen
- Begriffe
- Eigenschaften
- Standard-Hypergraphen

Anwendungen
Quellen
Fragen





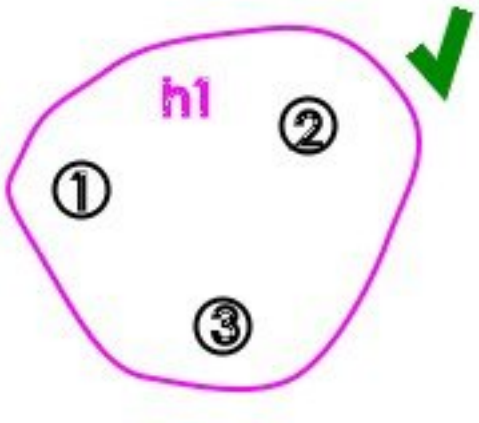
- **Reduziertheit**

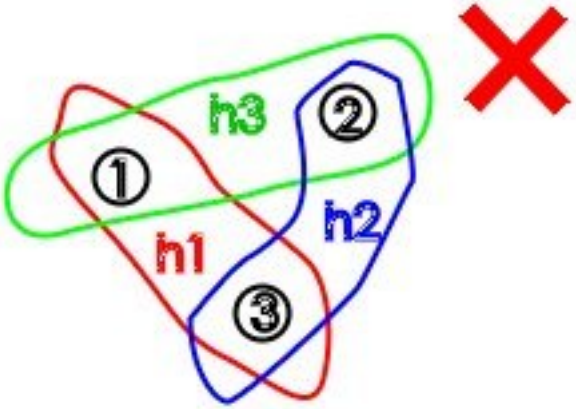
keine Hyperkante enthällt eine andere

Hypergraphen

Cliquenproblem
Hypergraphen
- Begriffe
- Eigenschaften
- Standard-Hypergraphen

Anwendungen
Quellen
Fragen





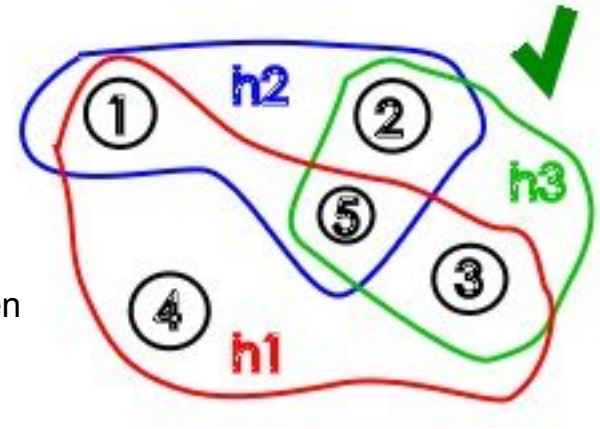
- Konformität

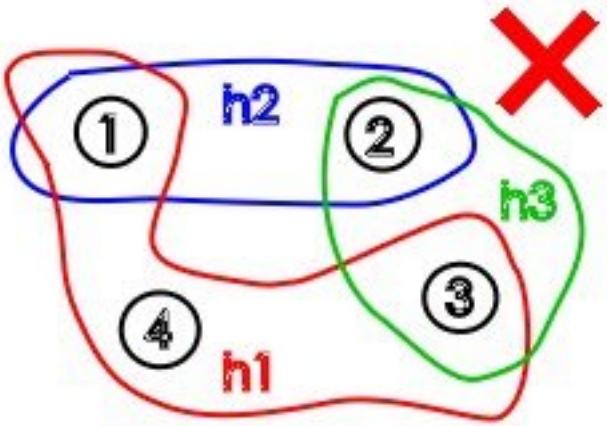
jede Clique im zugehörigen 2-Section-Graph ist in einer Hyperkante enthalten

Hypergraphen

Cliquenproblem
Hypergraphen
- Begriffe
- Eigenschaften
- Standard-Hypergraphen

Anwendungen
Quellen
Fragen





- **Helly-Eigenschaft**

erfüllt, wenn aus der Menge aller Hyperkanten jede Teilfamilie von paarweise nicht disjunkten Hyperkanten einen nicht leeren Gesammtdurchschnitt hat

Standard Hypergraphen

Cliquenproblem
Hypergraphen
Begriffe
Eigenschaften
Standard-Hypergraphen
Anwendungen
Quellen
Fragen

- Nachbarschafts-Hypergraph

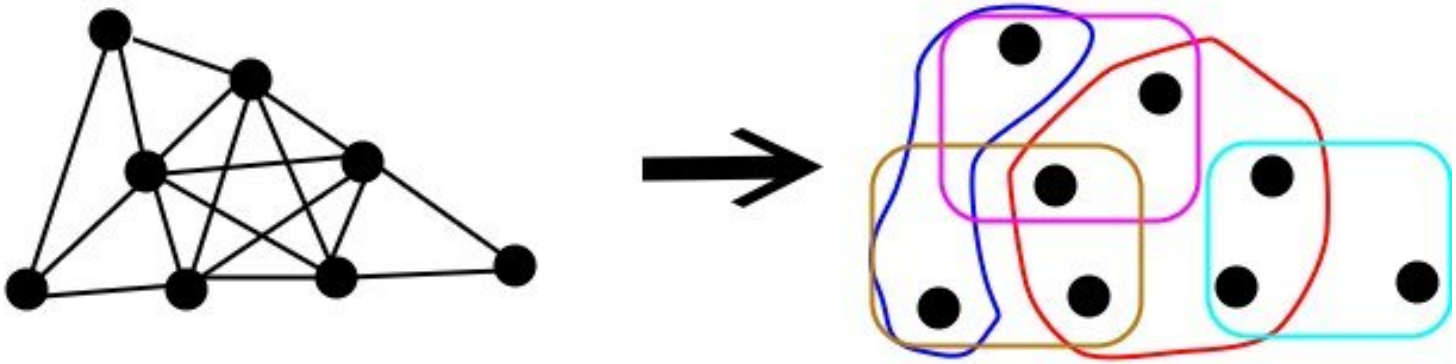
$N(G)=(V, \{N_B[v]: v \in V\})$

- Cliquen-Hypergraph

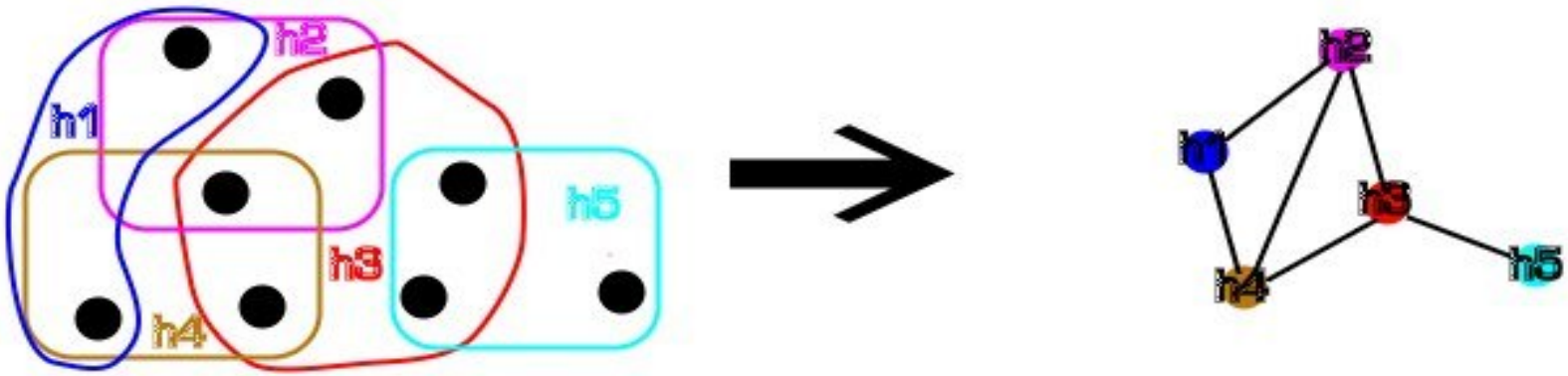
$C(G)=$

$(V, \{C_L : C_L$ ist eine max. Clique in $G\})$

Cliquenhypergraph



Cliquenhypergraph



Sätze:

- $(G_H^*)^*$ ist isomorph zu G_H
- $L(G_H)$ ist isomorph zu $2SEC(G_H)$
- Es gillt Konformität von $H \Leftrightarrow H^*$ hat die Helly-Eigenschaft
- Jeder konforme, reduzierte Hypergraph G_H ist der Cliquen-Hypergraph eines geeigneten Graphen: $2SEC(G_H)$

Anwendungen

Cliquenproblem
Hypergraphen
Anwendungen
Quellen
Fragen

- Identifizieren von Stuerhinterziehung in den USA
- Modellieren von Zellularen Strukturen
- Chemieinformatik (bei MCS)

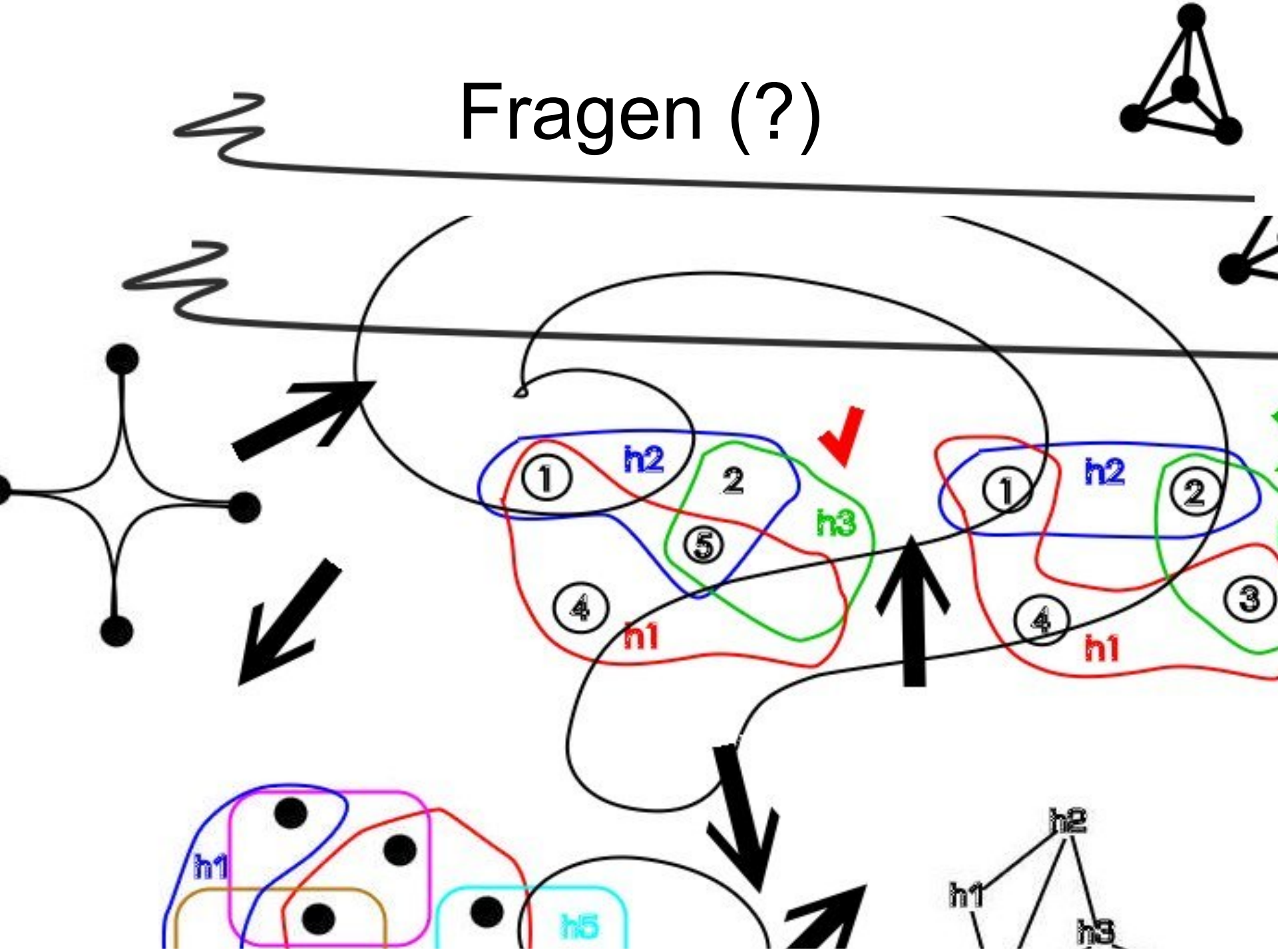
Ausblick

Cliquenproblem
Hypergraphen
Anwendungen
Quellen
Fragen

- Viel Forschung auf den beiden Gebieten
- Auf Perfekten Graphen ist das Cliquenproblem in polynomieller Zeit lösbar.
- Es sieht danach aus, als das Problem ob ein Graph ein Perfekter Graph ist, oder nicht, in polynomieller Zeit entschieden werden kann[6]!

Quellen

Cliquenproblem
Hypergraphen
Anwendungen
Quellen
Fragen

- [1] Graphen und Algorithmen - A. Brandstädt (Stuttgart: Teubner 1994) ISBN: 3-519-02131-5
- [2] http://www.ncbi.nlm.nih.gov/entrez/query.fcgi?cmd=Retrieve&db=PubMed&list_uids=12816568&dopt=Abstract
- [3] http://www2.toki.or.id/book/AlgDesignManual/BOOK/BOOK4/NODE172.HTM
- [4] http://en.wikipedia.org/wiki/Maximum_clique_problem
- [5] http://en.wikipedia.org/wiki/Union-find_algorithm
- [6] http://www.cs.concordia.ca/~chvatal/perfect/problems.html

Fragen (?)