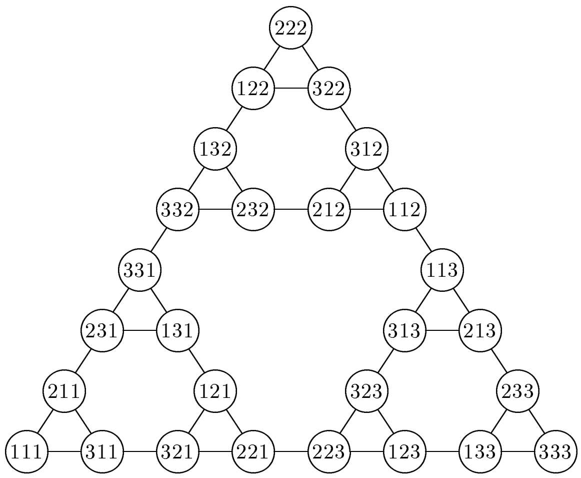
Grundlagen der Wissensverarbeitung — WS 98/99
Prof. Dr. R. Kruse / C. Borgelt

Lösung des 8. Übungsblattes

Zusatzaufgabe Zustandsgraphen: Türme von Hanoi



In der nebenstehenden Zeichnung ist der Zustandsgraph des Problems der Türme von Hanoi mit drei Scheiben gezeigt. Die drei Zahlen in den Kreisen (Zuständen) geben an, auf welchen Stäben die Scheiben liegen. Die Stäbe sind von links nach rechts durchnumeriert. Die erste Zahl gibt den Stab an, auf dem die kleinste Scheibe liegt, die zweite Zahl den Stab, auf dem die mittlere Scheibe liegt und die dritte den Stab, auf dem die größte Scheibe liegt. 213 bedeutet also, daß die kleinste Scheibe auf dem zweiten (mittleren) Stab, die mittlere Scheibe auf dem ersten Stab und die dritte Scheibe auf dem letzten Stab liegt, 313, daß die größte und die kleinste Scheibe auf dem letzten, die mittlere Scheibe dagegen auf dem ersten Stab liegt. Die Struktur des Graphen spiegelt offenbar sehr deutlich die rekursive Struktur des Problems wieder: Der Zustandsgraph für das Dreischeibenproblem ist aus drei Zustandsgraphen für das Zweischeibenproblem zusammengesetzt, die wiederum jeweils aus drei Zustandsgraphen für das Einscheibenproblem bestehen. Den Zustandsgraphen für das Vierscheibenproblem erhält man, indem drei Zustandsgraphen für Dreischeibenprobleme an den Ecken verbunden werden, so daß wieder ein Dreieck entsteht, usf. Die Struktur des Zustandsgraphen hat große Ähnlichkeit mit einer fraktalen Figur, die unter dem Namen Sierpinski-Dreieck bekannt ist.

Die rekursive Struktur des Graphen kann ausgenutzt werden, um Rekursionsformeln für die Anzahl der Züge einer Lösung, die Anzahl der Knoten und die Anzahl der Kanten in dem Zustandsgraphen für ein n-Scheibenproblem zu bestimmen. Aus diesen Rekursionsformeln lassen sich anschließend leicht geschlossene Formeln bestimmen.

a) Anzahl der Züge einer Lösung

Zur Lösung des eines n-Scheibenproblems muß offenbar eine Seite des dreieckigen Zustandsgraphen abgelaufen werden. Eine solche Seite besteht aus zwei Seiten von Zustandgraphen für $(n-1)$-Scheibenprobleme, die durch eine Kante verbunden sind. Folglich erhält man für die Anzahl der Züge einer Lösung die Rekursionsformel $f(n) = 2f(n-1)+1$, $n \geq 1$. Zur Lösung des Nullscheibenproblem brauchen keine Züge gemacht zu werden, also ist: $f(0) = 0$. Man erhält als geschlossene Darstellung $f(n) = 2(2(2(\ldots 2(2 \cdot 0 + 1) + 1 \ldots) + 1) + 1) + 1 = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1$.

b) Anzahl der Knoten des Graphen

Der Zustandsgraph für ein n-Scheibenproblem besteht offenbar, wie bereits oben bemerkt, aus drei Zustandsgraphen für $(n-1)$-Scheibenprobleme, folglich gilt die Rekursionsformel $g(n) = 3g(n-1)$, $n \geq 1$. Der Zustandsgraph für das Nullscheibenproblem enthält nur einen Zustand, also ist $g(0) = 1$. Damit erhält man direkt die geschlossene Darstellung $g(n) = 3^n$.

c) Anzahl der Kanten des Graphen

Wieder nutzt man aus, daß der Graph für ein n-Scheibenproblem aus drei Zustandsgraphen für $(n-1)$-Scheibenprobleme besteht. Diese Graphen sind offenbar an den Ecken durch drei zusätzliche Kanten verbunden. Damit ergibt sich unmittelbar die Rekursionsformel $h(n) = 3h(n-1)+3$, $n \geq 1$. Das Nullscheibenproblem enthält keine Kanten, also ist $h(0) = 0$. Man erhält als geschlossene Darstellung $f(n) = 3(3(3(\ldots 3(3\cdot 0+3)+3\ldots)+3)+3)+3 = \sum_{i=1}^{n} 3^i = \frac{3^{n+1}-3}{3-1} = \frac{1}{2}(3^{n+1}-3)$.

Aufgabe 26 Heuristische Suche: Wege in einem Labyrinth

a) Breitensuche

29	37	3	1	2	11	35
21	28	6	4	5	8	26
16	12	9	7	10	14	19
22	33	13	17	15	20	27
30	24	18	23	31	39	36
38	34	25	32	40		
			41			

Bei einer Breitensuche (Nachfolgerreihenfolge: Feld im Osten, Norden, Westen, Süden) werden die Felder in der rechts gezeigten Reihenfolge erreicht. Man kann diese Darstellung leicht erzeugen, ohne den Zustandsgraphen aufzeichnen zu müssen, indem man, am Ausgangsfeld mit der Nummer 1 startend, jeweils die Felder um das Feld numeriert, das die kleinste Nummer unter den Feldern hat, von denen aus unbesuchte Felder betreten werden können. Unbeschriftete Felder werden nicht erreicht, da vorher das Zielfeld gefunden wird. Offenbar müssen 41 Zustände erzeugt werden, was bei maximal 49 Zuständen schon recht viel ist.

b) Schätzfunktion für die Weglänge zum Zielfeld

9	8	7	6	7	8	9
8	7	6	5	6	7	8
7	6	5	4	5	6	7
6	5	4	3	4	5	6
5	4	3	2	3	4	5
4	3	2	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3

Eine einfache Schätzfunktion für die Weglänge zum Zielfeld ist der Manhattan- oder City-Block-Abstand eines Feldes vom Zielfeld, d.h. die Summe der Abstände in x- und y-Richtung. Die Werte, die sich damit für die einzelnen Felder ergeben, sind in dem nebenstehenden Labyrinth gezeigt. Offenbar bevorzugt diese Heuristik Wege, die nahe an der vertikalen Verbindungslinie des Start- und des Zielfeldes liegen. Dies ist auch sinnvoll, denn wenn es nahe dieser Linie einen Weg gibt, so ist er wahrscheinlich kürzer als einer, der am rechten oder linken Rand des Labyrinthes verläuft.

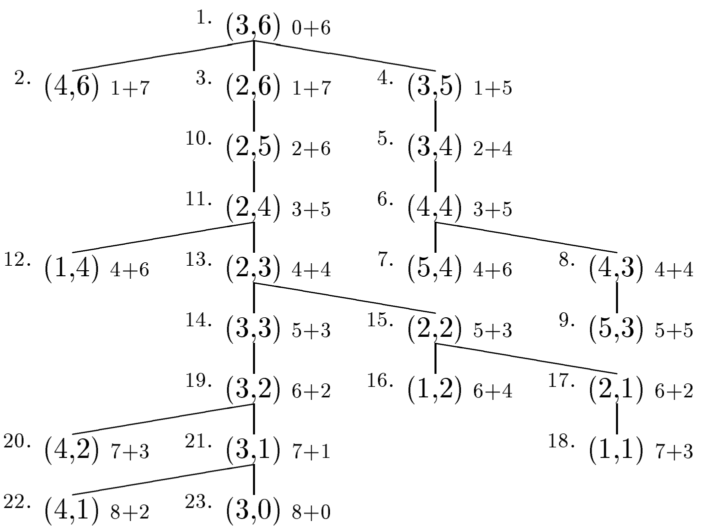
c) Heuristische Suche mit dem A^*-Algorithmus

		3	1	2		
		10	4			
	12	11	5	6	7	
		13	14	8	9	
	16	15	19	20		
	18	17	21	22		
			23			

Bei einer heuristischen Suche mit dem A^*-Algorithmus werden die Felder in der Reihenfolge erreicht, die in dem nebenstehenden Labyrinth gezeigt ist. Bei mehreren Zuständen mit dem gleichen Wert der Funktion $\hat{f}$ wurde der Zustand bevorzugt, für den die Funktion $\hat{h}$ den kleineren Wert liefert. Sind auch die Werte der Funktion $\hat{h}$ gleich, wurde der Zustand mit der kleineren y-Koordinate gewählt. Ist auch die y-Koordinate gleich, wurde der Zustand mit der kleineren x-Koordinate erweitert. Der Suchbaum mit den Werten der Heuristikfunktion ist auf der nächsten Seite gezeigt. Man erkennt deutlich, daß sich die Suche um die Mittelachse des Labyrinthes konzentriert (wie es, siehe oben, ja auch zu erwarten ist), so daß das Zielfeld schon im 23. Schritt erreicht wird.

Ein so günstiges Ergebnis ist natürlich nicht zwingend. Es wird hier erreicht, weil die Heuristik die Lösung gut „erahnt“. Wäre der kürzeste Weg von dem durch $\circ$ zu dem durch $\bullet$ markierten Feld verschlungen, so müßte auch der A^*-Algorithmus mit dieser Heuristik fast alle Felder des Labyrinthes besuchen.

Nebenstehendes Diagramm zeigt den Suchbaum des A^*-Algorithmus, wie er bei der Suche des Weges in dem Labyrinth aus Aufgabe 26 erzeugt wird. Die Zustände sind durch Koordinaten des zugehörigen Feldes angegeben. Die Zahlen links neben den Koordinaten geben an, als wievielter ein Zustand erzeugt wurde. Rechts stehen die Werte der Heuristikfunktion $\hat{f} = \hat{g} + \hat{h}$, wobei $\hat{g}$ die Zahl der Schritte zum Erreichen des Feldes und $\hat{h}$ die Heuristik aus Teilaufgabe b sind.



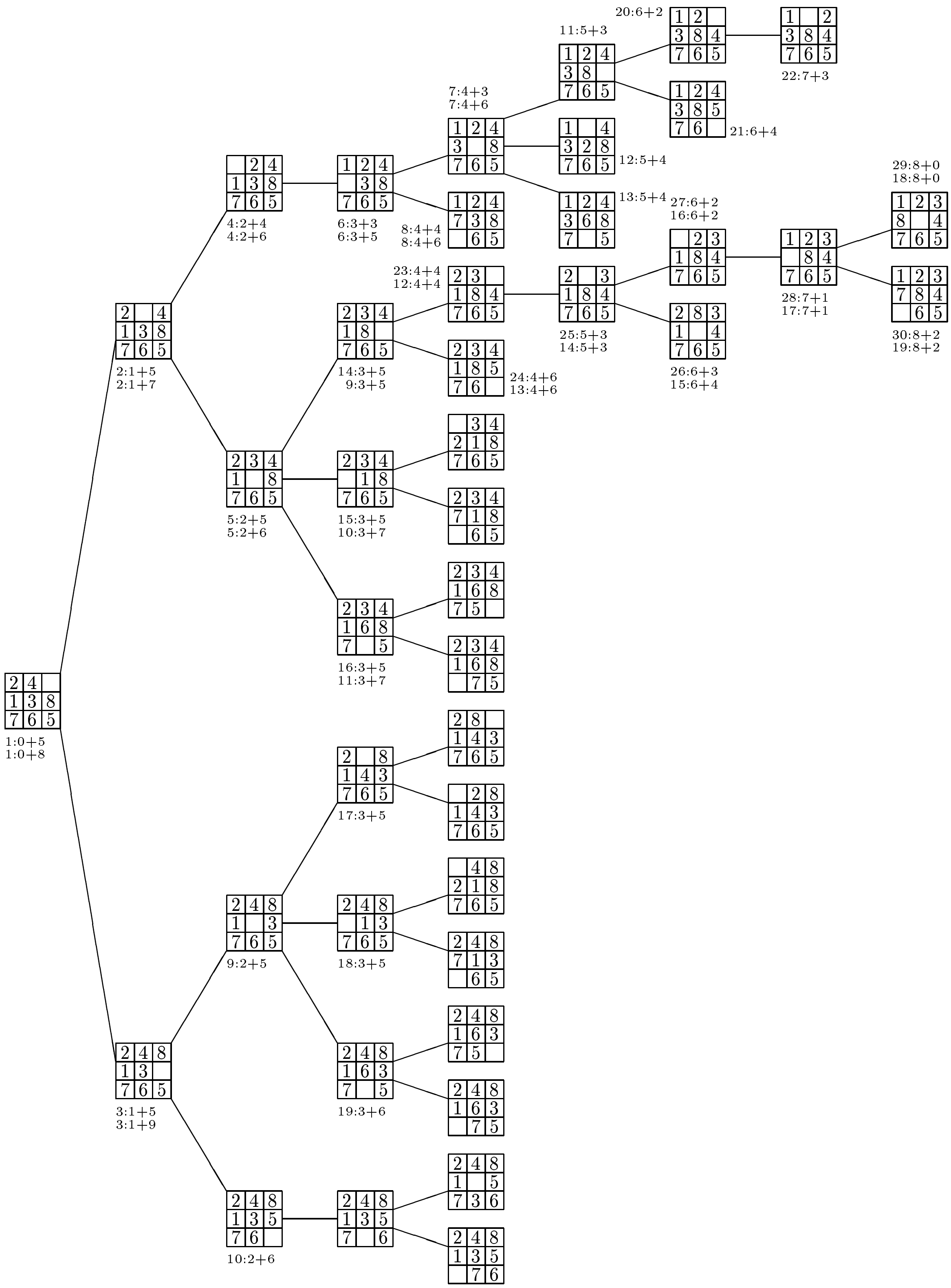
Aufgabe 27 Heuristische Suche: Qualität der Heuristik

Der Suchbaum für das 8-Puzzle-Problem dieser Aufgabe ist auf der nächsten Seite gezeigt. An den Zuständen ist die Bewertung mit den beiden Heuristiken (oben oder nur eine Angabe: Heuristik a, unten: Heuristik b) angegeben. Die vor der Bewertung stehenden Nummern geben an, in welcher Reihenfolge die Zustände in den beiden Fällen erzeugt werden. Man sieht, daß beide Heuristiken die Suche gegenüber einer Breitensuche deutlich einschränken, denn mit beiden Heuristiken werden nur noch vier der 16 Zustände der fünften Ebene besucht. Außerdem ist deutlich zu erkennen, daß die Heuristik b die Suche stärker einschränkt als die Heuristik a, denn in dem unteren, vom Startzustand ausgehenden Ast werden fünf, im oberen, über die fünfte Ebene hinausgehenden Ast sechs, insgesamt also elf zusätzliche Zustände erzeugt. Dies führt dazu, daß mit der Heuristik b weniger als $\frac{2}{3}$ der Zustände erzeugt werden, die mit der Heuristik a erzeugt werden. Man beachte, daß der Vorteil der Heuristik b noch steigt, wenn mit der Heuristik a, was ja ebenfalls möglich wäre, vor dem Zustand 14 einer oder mehrere der Zustände 15, 17 und 18 erweitert werden.

Der Grund für diesen Unterschied liegt offenbar erstens darin, daß die Heuristik b genauer unterscheiden kann. D.h. Heuristik b sieht Zustände als unterschiedlich erfolgversprechend an, die von der Heuristik a nicht unterschieden werden (z.B. die Zustände 2 und 3). Zweitens kann die Heuristik a leicht dadurch irregeleitet werden, daß eine Zahl ihr Zielfeld erreicht, obwohl diese Zahl zum Erreichen der Lösung von diesem Feld wieder entfernt werden muß. Dies ist im Zustand 6 der Fall. Offenbar müssen in diesem Zustand die Zahlen 1 und 2 ihre bereits erreichten Zielpositionen wieder verlassen, um die Zahl 3 an die richtige Stelle zu bringen. Mit der Heuristik a wird dies nicht erkannt, und folglich wird dieser Teilbaum relativ weit durchsucht. Mit der Heuristik b dagegen stellt sich schon in den beiden Zuständen der nächsten Ebene heraus, daß sich die Lage nur wieder verschlechtern läßt. Die Suche in diesem Teilbaum wird daher zurückgestellt, und dadurch, wie der Fortgang zeigt, abgebrochen.

Aufgabe 28 Prädikatenlogik: Formeln lesen

Diese Aufgabe ist sicher sehr einfach, da man schon aus den Namen der Prädikate die Sprichworte erraten kann. Man beachte trotzdem, wie bestimmte sprachliche Ausdrücke formalisiert sind. Diese Aufgabe war i.w. als Vorbereitung der Aufgabe 29 gedacht indem sie einige Beispiele für Formalisierungen liefert.



Der Suchbaum zum 8-Puzzle-Problem (Aufgabe 27)

a) Auch ein blindes Huhn findet einmal ein Korn.

b) Wo gehobelt wird, da fallen Späne.

c) Den Sack schlagen und den Esel meinen.

d) Wer den Schaden hat, braucht für den Spott nicht zu sorgen.

Aufgabe 29 Prädikatenlogik: Formalisierung natürlichsprachlicher Aussagen

Die Prädikatenlogik läßt oft mehrere Möglichkeiten der Formalisierung natürlichsprachlicher Aussagen zu. Die hier angegebenen Lösungen sind daher nur als Beispiele und nicht als *die* richtige Lösung zu verstehen. Je nach Verwendungszweck können andere Darstellungen günstiger sein. Es wird jedoch jeweils versucht zu begründen, warum die gewählte Darstellung sinnvoll ist bzw. warum bestimmte Strukturen verwendet wurden, die vielleicht nicht offensichtlich sind.

a) $\texttt{starb}(\texttt{Autor}(\text{Faust}), 1832, \text{Weimar})$

Man beachte, daß in dieser Lösung `Autor` ein Funktionsausdruck ist. Ein Funktionsausdruck liefert zu einem Individuum (oder, wenn er mehrstellig ist, zu mehreren Individuen) ein anderes, eindeutig bestimmtes Individuum als Funktionswert, und das ist genau, was durch die Kennzeichnung ausgedrückt wird: Der Autor des „Faust“ ist eine eindeutig bestimmte Person, nämlich J.W. von Goethe. Man erkennt dies leicht daran, daß man die Kennzeichnung durch diesen Eigennamen ersetzen kann. „Faust“, „1832“ und „Weimar“ werden als Konstanten verwendet, was ihrem Wesen als (Quasi-)Eigennamen entspricht.

b) $\forall x : \forall y : \neg\texttt{wagt}(x, y) \rightarrow \neg\texttt{gewinnt}(x, y)$

Hier ist zu beachten, daß „wagen“ und „gewinnen“ transitive Verben sind, die sich normalerweise auf ein Objekt beziehen. Sie werden in dem Sprichwort „Wer nicht wagt, der nicht gewinnt“ nur elliptisch gebraucht. Gemeint ist offenbar so viel wie: Wer ein Spiel/ein Wette nicht wagt, gewinnt dieses Spiel/diese Wette auch nicht. Um das eigentlich nötige, aber ausgelassene Objekt darzustellen, verwendet die obige Formalisierung eine zweite Variable y.

c) $\exists t_1 : \exists t_2 : \texttt{anwesend}(\text{Sabine}, \text{dort}, t_1) \wedge \texttt{anwesend}(\text{Peter}, \text{dort}, t_2) \wedge t_1 \neq t_2$

Hier ist zu beachten, daß „dort“ einen bestimmten Ort bezeichnet, der aus dem Zusammenhang bekannt sein sollte. Er könnte z.B. in einem vorhergehenden Satz benannt worden sein. In der obigen Formel ist „dort“ daher *keine* Variable, sondern eine Konstante. Eine Formalisierung mit Hilfe einer Variable für den Ort, etwa $\exists o : \exists t_1 : \exists t_2 : \texttt{anwesend}(\text{Sabine}, o, t_1) \wedge \texttt{anwesend}(\text{Peter}, o, t_2) \wedge t_1 \neq t_2$, wäre nicht angemessen. Diese Formel drückt etwas anderes aus, nämlich daß Sabine und Peter *irgendwo* nicht zur gleichen Zeit waren, und das ist offenbar etwas anderes als die Aussage, daß sie *an einem bestimmten Ort* nicht zur gleichen Zeit waren.

d) $\exists x : \texttt{König\_von}(x, \text{Frankreich}, \text{heute}) \wedge (\forall y : \texttt{König\_von}(y, \text{Frankreich}, \text{heute}) \rightarrow y = x)$
$\rightarrow \texttt{kahlköpfig}(x)$

In dieser Aussage ist offenbar der Ausdruck „Der derzeitige König von Frankreich“ problematisch. Dieser Ausdruck scheint auf den ersten Blick von der gleichen Art zu sein wie der Ausdruck „Der Autor des ‚Faust‘“, d.h. er scheint eine Kennzeichnung zu sein. Man könnte daher versucht sein, ihn durch einen Funktionsausdruck darzustellen. Dies gelingt aber nicht, denn ein Funktionsausdruck soll ein eindeutig bestimmtes Individuum liefern. Frankreich hat aber derzeit keinen König. Das durch die Pseudokennzeichnung „Der derzeitige König von Frankreich" beschriebene Individuum existiert nicht. Man muß daher diesen Ausdruck durch ein Prädikat darstellen und die zusätzlichen, im bestimmten Artikel steckenden Bedingungen, nämlich die Existenz und die Eindeutigkeit des Individuums, explizit aufführen. (Hier reicht im Prinzip die Existenzbedingung, da schon sie nicht erfüllt ist.) Man sieht so den Vorteil von Funktionsausdrücken, da sie die Bedingungen der Existenz und Eindeutigkeit — wenn sie erfüllt sind — sehr kompakt zum Ausdruck bringen. Man beachte außerdem, daß die obige Aussage formal wahr ist, obwohl wir die natürlichsprachliche Aussage eher als sinnlos ansehen.

e) $\forall x : (\forall y : \texttt{bewundern}(y, x) \rightarrow \texttt{mögen}(x, y)) \land \neg(\forall z : \texttt{bewundern}(x, z) \rightarrow \texttt{mögen}(x, z))$

Das „wir" der Aussage wurde hier durch eine allquantifizierte Variable dargestellt, da es wohl als alle Menschen umfassend gemeint ist. Beachtenswert ist, daß das Bindewort „aber", durch eine einfache Konjunktion dargestellt ist. Die Prädikatenlogik ist nicht in der Lage, die semantische Feinheit des „aber" wiederzugeben.

f) $\forall x : \forall y : \forall z : (\texttt{Grube}(z) \land \texttt{gräbt\_für}(x, y, z) \land x \neq y) \rightarrow \texttt{fällt\_in}(x, z)$

Hier ist wichtig, daß man ausschließen muß, daß x die Grube für sich selbst gräbt, denn es heißt ja, „wer *andern* eine Grube gräbt, ...". Dies geschieht hier durch die Bedingung, daß x ungleich y ist, also der Grabende x nicht identisch mit y, für den die Grube gegraben wird. Man beachte, daß man *nicht* ausschließen muß, daß der in Grube fällt, für den die Grube gegraben wurde, also y. Dies kann geschehen oder auch nicht geschehen. Das Sprichwort sagt darüber nichts aus.

g) $\exists x : \texttt{Mond\_von}(x, \text{Jupiter}) \land (\forall y : \texttt{Mond\_von}(y, \text{Jupiter}) \rightarrow x = y)$
$\rightarrow \texttt{umrundet}(x, \text{Jupiter}, 4 \text{ Tage})$

Hier tritt ein ähnliches Problem auf wie in der Aussage über den derzeitigen König von Frankreich. Wieder haben wir es mit einem Ausdruck zu tun, der wie eine Kennzeichnung aussieht, aber keine ist: „Der Mond des Jupiter". Bekanntlich hat der Jupiter zwölf Monde, vier größere, die schon Galilei beobachtete, und acht kleinere. „Der Mond des Jupiter" ist daher keine Kennzeichnung, denn das gemeinte Individuum ist nicht eindeutig bestimmt. („Der Mond der Erde" wäre dagegen eine korrekte Kennzeichnung.) Wieder müssen wir daher ein Prädikat verwenden und die in dem bestimmten Artikel steckenden Bedingungen, also die Existenz und die Eindeutigkeit des bezeichneten Individuums, explizit aufführen. (Hier sind beide notwendig, da ja die Eindeutigkeit verletzt ist.) Man beachte wieder, daß die obige Aussage formal wahr ist, obwohl wir die natürlichsprachliche Aussage eher als sinnlos ansehen.

h) $\forall p : \forall q : (\texttt{wahr}(p) \land \texttt{impliziert}(p, q)) \rightarrow \texttt{wahr}(\texttt{q})$

Man beachte, daß die (einfachere) Lösung $\forall P : \forall Q : (P \land (P \rightarrow Q)) \rightarrow Q$ nicht möglich ist, da P und Q Aussagenvariablen und folglich nullstellige Prädikate sind. In der Prädikatenlogik erster Stufe sind aber nur Quantoren über Individuen erlaubt. Quantoren über Prädikate gibt es erst in Prädikatenlogiken höherer Stufe. Man muß hier folglich die Prädikatenlogik als Metasprache (im Sinne Tarskis) verwenden, um über die Wahrheit von Aussagen und über Konsequenzen von Aussagen zu sprechen, damit nur über Individuen quantifiziert wird. Das führt dazu, daß man so seltsame Prädikate wie `wahr` und `impliziert` benötigt.