

# Intelligente Systeme

## Fuzzy-Systeme

**Prof. Dr. R. Kruse    C. Braune**

{rudolf.kruse, christian.braune}@ovgu.de

Institut für Intelligente Kooperierende Systeme

Fakultät für Informatik

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

# Übersicht

## 1. Impräzision

## 2. Fuzzy-Mengen

## 3. Fuzzy-Regelung

## 4. Anwendungen

# Motivation

Wir benutzen täglich impräzise/unscharfe/unsichere Ausdrücke wie

- *schnell, groß, ungefähr 12 Uhr, alt, usw.*

Menschlichen Aktionen/Entscheidungen beruhen auf solchen Konzepten, z.B.

- Autofahren, Einparken
- Finanzielle/wirtschaftliche Entscheidungen
- Recht und Justiz
- Vorlesung halten
- In Vorlesung/Übung zuhören/mitarbeiten

Computer benötigen ein mathematisches Modell zur Repräsentation.

Klassischen mathematischen Konzepte sind oft unzureichend.

## Lotfi Asker Zadeh (1965)

Objektklassen in realer Welt haben keine genau definierten Kriterien von Zugehörigkeit.

Impräzise definierten „Klassen“ spielen eine wichtige Rolle im menschlichen Denken.

Besonders in den Bereichen Mustererkennung, Informationsaustausch, Abstraktion, . . . .



Zadeh 2004 (geb. 1921)

# Impräzision

**Jeder Begriff wird als impräzise bezeichnet wenn seine *Bedeutung* durch keine scharfen Grenzen festgelegt ist.**

Kann vollständig/zu einem bestimmten Grad/überhaupt nicht eingesetzt werden.

Allmählichkeit („Zugehörigkeitsverlauf“) wird auch als *Unschärfe* (engl. fuzziness) bezeichnet.

Eine Aussage ist impräzise wenn sie unscharfe Prädikate enthält.

Solche Aussagen sind weder wahr noch falsch, jedoch dazwischen.

Sie sind *zu einem bestimmten Grad* wahr (partielle Wahrheit).

Formen solche Grade können in der natürlichen Sprache gefunden werden, z.B. *viel, eher, fast nicht*, usw.

## Beispiel – Das Sorites-Paradoxon

Ist ein Sandhaufen klein, wird ein Sandkorn mehr ihn nicht ändern.  
Ein Sandhaufen mit einem Sandkorn ist klein.

---

Also sind alle Sandhaufen klein.

Das Paradoxon kommt von der „alles oder nichts“-Behandlung des Wortes *klein*.

Der Grad der Wahrheit von “Sandhaufen ist klein” nimmt ab mit jedem weiteren Sandkorn.

Eine bestimmte Anzahl von Worten weist auf eine kontinuierliche numerische Skala hin.

## Beispiel – Das Sorites-Paradoxon

Wie viele Sandkörner hat ein Sandhaufen wenigstens?

Aussage  $A(n)$ : „ $n$  Sandkörner sind ein Sandhaufen.“

Sei  $g_n = W(A(n))$  der „Grad der Akzeptanz“ von  $A(n)$ .

Dann können

$$0 = g_0 \leq g_1 \leq \dots \leq g_n \leq \dots \leq 1$$

als Wahrheitswerte einer **mehrwertigen Logik** interpretiert werden.

**Warum existiert Impräzision in allen Sprachen?**

# Impräzision

**Gibt es einen Zugehörigkeitsschwellenwert für unpräzise definierte Klassen?**

Betrachten wir den Begriff *kahlköpfig*:

Ein Mann ohne Haar auf seinem Kopf ist kahlköpfig;  
ein behaarter Mann ist nicht kahlköpfig.

Für gewöhnlich ist *kahlköpfig* nur teilweise anwendbar.

Wo setzen wir den *kahlköpfig/nicht kahlköpfig*-Schwellenwert?

**Fuzzy-Mengentheorie setzt keinerlei Schwellenwert voraus!**

Dies hat Konsequenzen für die Logik hinter der Fuzzy-Mengentheorie.



# Unsicherheit modelliert durch Wahrscheinlichkeit

Unsicherheit entsteht auch durch widersprüchliche, jedoch genau beobachtete Informationen.

Für gewöhnlich in Statistik: Betrachte Zufallsexperiment, das mehrmals durchgeführt wird und nicht immer das selbe Ergebnis liefert.

Unsicherheit aufgrund von fehlender Information.

# Unterscheidung zwischen Impräzision und Unsicherheit

Impräzision:

z.B. "Heute ist das Wetter schön."

ungenau definierte Konzepte

Details werden vernachlässigt

„Rechnen mit Worten“

Unsicherheit:

e.g. „Wie wird der Umtauschkurs des Dollars morgen sein?“

Wahrscheinlichkeit, Möglichkeit

## Beispiele von Impräzision und Unsicherheit

**Unsicherheit unterscheidet sich von Impräzision. Es kann daraus hervorgehen.**

„Dieses Auto ist ganz schön alt.“ (Impräzision)

Es mangelt hier an der Fähigkeit, numerische Merkmale zu messen oder zu evaluieren.

„Dieses Auto wurde wahrscheinlich in Deutschland hergestellt.“  
(Unsicherheit)

Unsicherheit über die wohldefinierte Aussage *hergestellt in Deutschland*,

vllt. basierend auf einer Statistik (Zufallsexperiment).

„Das Auto, dass ich mir zufällig aussuchte, ist vermutlich sehr groß.“  
(Unsicherheit und Impräzision)

Es fehlt eine genaue Definition des Begriffs *groß*.

Modifikator *sehr* zeigt ungefähren Grad der „Großheit“.

# Anwendung von Fuzzy-Systemen

Regelungstechnik

Approximatives Schließen

Datenanalyse

Bildverarbeitung

Vorteile:

Nutzen von unpräzisen Informationen

Nutzen von Expertenwissen

Produkteinführungszeit

Marketing-Aspekte

# Waschmaschinen nutzen Fuzzy-Logik



# Übersicht

## 1. Impräzision

## 2. Fuzzy-Mengen

Fuzzy-Zahlen

Linguistische Variablen und Werte

Bedeutung

Fuzzy-Mengenoperationen

## 3. Fuzzy-Regelung

## 4. Anwendungen

# Fuzzy-Mengen

Teilmenge  $M \subseteq X$ : Beschreibung durch **charakteristische Funktion**

$$\chi_M : X \rightarrow \{0, 1\}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in M, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

impräzise Teilmenge von  $X$ : Beschreibung durch eine **Zugehörigkeitsfunktion**

$$\mu : X \rightarrow [0, 1]$$

$\mu$  ordnet jedem  $x \in X$  eine reelle Zahl aus  $[0, 1]$  zu.

$\mu(x)$  heißt **Zugehörigkeitsgrad** von  $x$ .

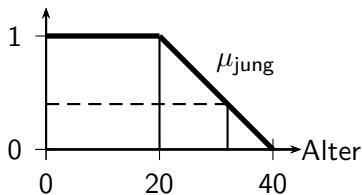
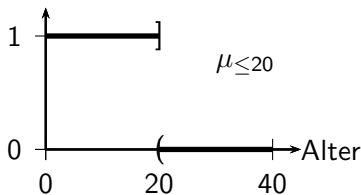
$\mathcal{F}(X)$  Menge aller Fuzzy-Mengen

# Fuzzy-Mengen

$\mu(x) = 1$  bedeutet volle Zugehörigkeit

$\mu(x) = 0$  bedeutet absolut keine Zugehörigkeit

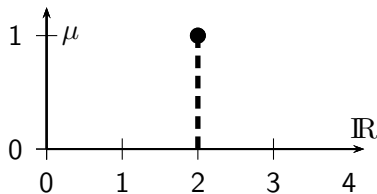
Mengen sind Spezialfälle von Fuzzy-Mengen



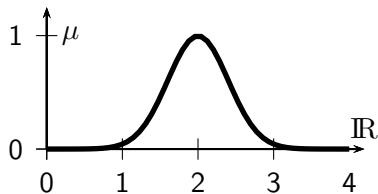
Die Wahl der Fuzzy-Menge ist oft subjektiv.



## Beispiele für Fuzzy-Zahlen



genau zwei



ungefähr zwei

Genauer numerischer Wert hat Zugehörigkeitsgrad von 1.

links: monoton steigend, rechts: monoton fallend

unimodale Funktion

Ausdrücke wie *ungefähr* werden z.B. modelliert durch Dreiecks- oder Gaußfunktionen

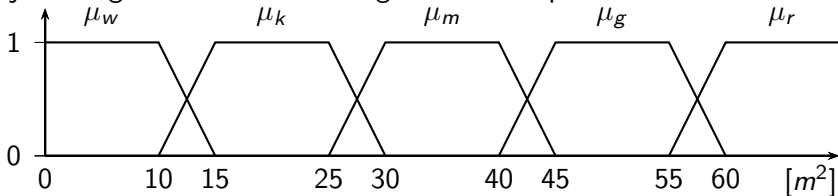
# Linguistische Variablen und Werte

**linguistische Variablen:** Attribute in Fuzzy-Systemen

werden **partitioniert** in **linguistische Werte** (nicht numerisch!)

Partition für gewöhnlich subjektiv

jeder ling. Wert hat Bedeutung aber keinen präzisen numer. Wert



z.B. *Grundfläche einer Wohnung A* mit ling. Werten wie

- *winzig, klein, mittel, groß, riesig*

jedes  $x \in A$  hat  $\mu(x) \in [0, 1]$  für jeden Wert, z.B. für  $a = 42,5m^2$

$$\Rightarrow \mu_w(a) = \mu_k(a) = \mu_r(a) = 0, \quad \mu_m(a) = \mu_g(a) = 0.5$$

# Bedeutung von Fuzzy-Mengen

Einsatz von Fuzzy-Mengen in drei Bereichen der Informatik

- Klassifikation und Datenanalyse
- Entscheidungsunterstützung
- Approximatives Schließen

Es werden oft verschiedene Bedeutungen der Zugehörigkeitsgrade genutzt:

- Ähnlichkeit
- Präferenz
- Möglichkeit

# Standard-Fuzzy-Mengenoperationen

Eine Erweiterung der Mengenlehre zu **Fuzzy-Mengenlehre** erfolgt *punktweise* mit den Operatoren einer geeigneten mehrwertigen Logik.

Definition folgender Operationen auf  $\mathcal{F}(X)$ :

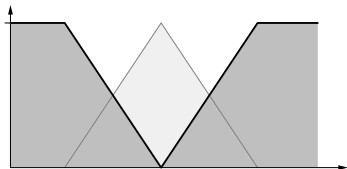
$$(\mu \wedge \mu')(x) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\mu(x), \mu'(x)\} \quad \text{Schnitt („UND“),}$$

$$(\mu \vee \mu')(x) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{\mu(x), \mu'(x)\} \quad \text{Vereinigung („ODER“),}$$

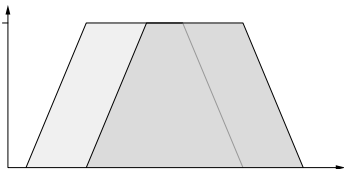
$$\neg\mu(x) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \mu(x) \quad \text{Komplement („NICHT“)}$$

$\mu$  ist genau dann Teilmenge von  $\mu'$  wenn  $\mu \leq \mu'$

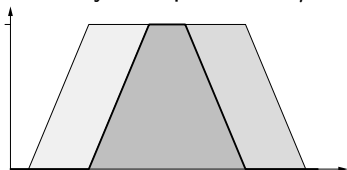
# Beispiele für Standard-Fuzzy-Mengenoperationen



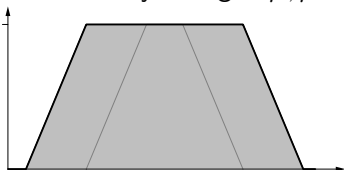
Fuzzy-Komplement  $\neg\mu$



zwei Fuzzy-Mengen  $\mu, \mu'$



Fuzzy-Schnitt  $\mu \wedge \mu'$



Fuzzy-Vereinigung  $\mu \vee \mu'$

# Übersicht

## 1. Impräzision

## 2. Fuzzy-Mengen

## 3. Fuzzy-Regelung

Architektur eines Fuzzy-Reglers

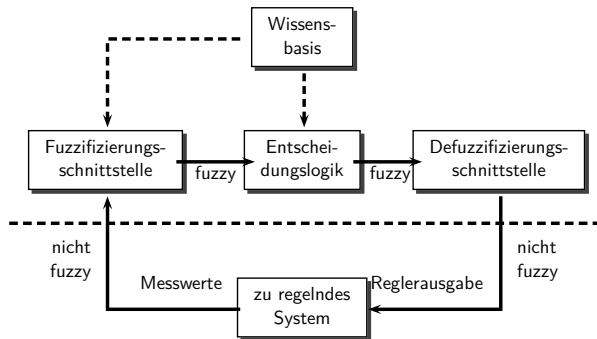
Stabbalance-Problem

Mamdani-Assilian

Defuzzifizierung

## 4. Anwendungen

# Architektur eines Fuzzy-Reglers



Wissensbasis = Fuzzy-Regeln + Fuzzy-Partitionen

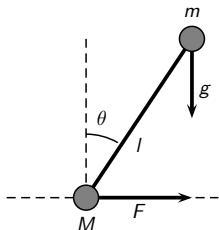
Fuzzy-Regel: **if**  $X_1$  **is**  $A_{i_1}^{(1)}$  **and** ... **and**  $X_n$  **is**  $A_{i_n}^{(n)}$  **then**  $Y$  **is**  $B$

- $X_1, \dots, X_n$  Meßgrößen,  $Y$  Stellgröße
- $A_{i_k}^{(k)}$  und  $B$  linguistische Terme mit zugehörigen Fuzzy-Mengen

## Beispiel — Stabbalance

Balancieren eines aufrecht stehenden Stabes durch Bewegung seines Fußes

unteres und oberes Stabende sind beweglich



Masse  $m$  am Fuß, Masse  $M$  am Kopf

Einfluss der Masse des Stabs vernachlässigbar klein

gesucht: Kraft  $F$  (Stellgröße)

folgende Messgrößen gegeben:

- Winkel  $\theta$  des Stabs in Bezug zur Vertikalen
- Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$

beide sollten schnell gegen Null konvergieren



## Beispiel — Stabbalance (cont.)

Differentialgleichung des Stabbalanceproblems:

$$(M + m) \sin^2 \theta \cdot l \cdot \ddot{\theta} + m \cdot l \cdot \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\theta}^2 - (M + m) \cdot g \cdot \sin \theta = -F \cdot \cos \theta$$

Berechne  $F(t)$  so, dass  $\theta(t)$  und  $\dot{\theta}(t)$  schnell gegen Null konvergieren.

Physikalische Analyse benötigt Wissen über den physikalischen Prozess.

## Probleme des klassischen Ansatzes

Es ist oft sehr schwer oder gar unmöglich ein genaues mathematisches Modell anzugeben.

Beschreibung mit Differentialgleichungen ist sehr komplex.

Tiefgehende physikalische Kenntnisse vom Ingenieur benötigt.

Die exakte Lösung zu finden, kann sehr schwierig sein.

Es sollte möglich sein, den Prozess ohne ein physikalisch-mathematisches Modell zu steuern, z.B. ein Mensch kann Fahrrad fahren ohne von der Existenz von Differentialgleichungen zu wissen.

# Fuzzy Ansatz

Simuliere das Verhalten eines Menschen, der weiß, wie gesteuert wird.

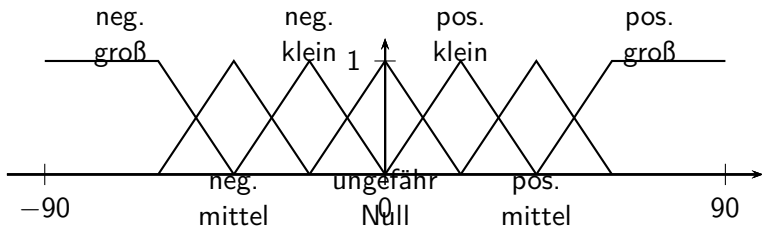
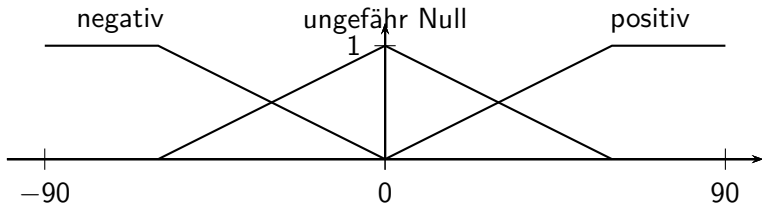
Das ist eine **wissensbasierte Analyse**.

Bitte einen Experten direkt, die Analyse durchzuführen.

Der Experte spezifiziert dann sein Wissen in Form von **linguistischen Regeln**, z.B. für das Stabbalanceproblem:

“Wenn  $\theta$  ungefähr Null ist und  $\dot{\theta}$  auch ungefähr Null ist, dann muss  $F$  auch ungefähr Null sein.”

# Grobe und feine Fuzzy-Partitionen



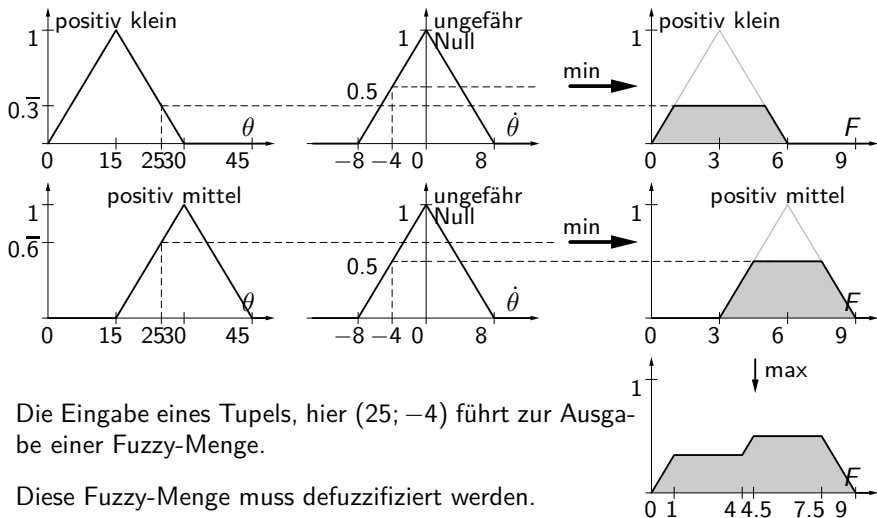
# Stabbalance: Regelbasis

		$\theta$						
		nb	nm	ns	az	ps	pm	pb
$\dot{\theta}$	nb			ps	pb			
	nm				pm			
	ns	nm		ns	ps			
	az	nb	nm	ns	az	ps	pm	pb
	ps				ns	ps		pm
	pm				nm			
	pb				nb	ns		

19 Regeln wie z.B.:

Falls  $\theta$  *ungefähr Null* ist und  $\dot{\theta}$  *negativ mittel* ist  
dann ist  $F$  *positiv mittel*.

# Fuzzy-Regelung nach Mamdani-Assilian

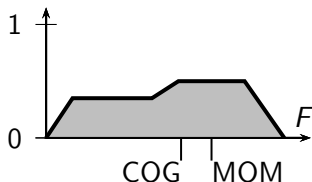


Die Eingabe eines Tupels, hier  $(25; -4)$  führt zur Ausgabe einer Fuzzy-Menge.

Diese Fuzzy-Menge muss defuzzifiziert werden.

# Defuzzifizierung

Auf Basis der Ausgabe-Fuzzy-Menge wird ein geeigneter scharfer Ausgabewert ausgewählt.



wichtigste Methoden zur Defuzzifizierung:

*Schwerpunktmethode* (Center Of Gravity, COG)  
Schwerpunkt der Fläche unter Ausgabe-Fuzzy-Menge

*Flächenmittelpunktmethode* (Center Of Area, COA)  
Punkt, der Fläche unter Ausgabe-Fuzzy-Menge in gleich große Teile teilt

*Maxima-Mittelwert-Methode* (Mean Of Maxima, MOM)  
arithmetisches Mittel der Stellen mit maximalem Zugehörigkeitsgrad

# Übersicht

1. Impräzision

2. Fuzzy-Mengen

3. Fuzzy-Regelung

**4. Anwendungen**

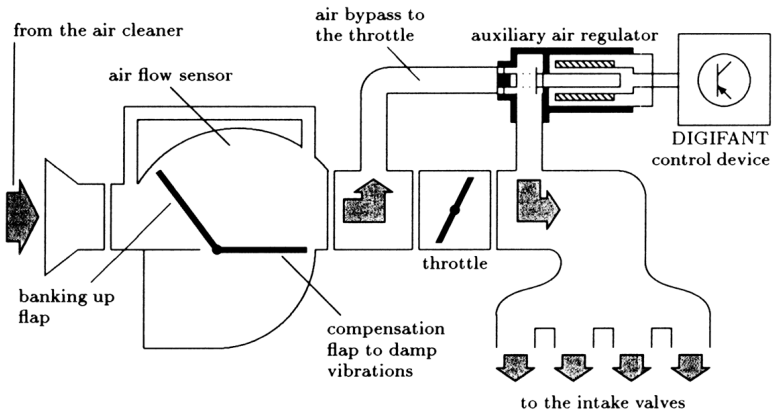
Leerlaufdrehzahlregelung

Automatisches Getriebe

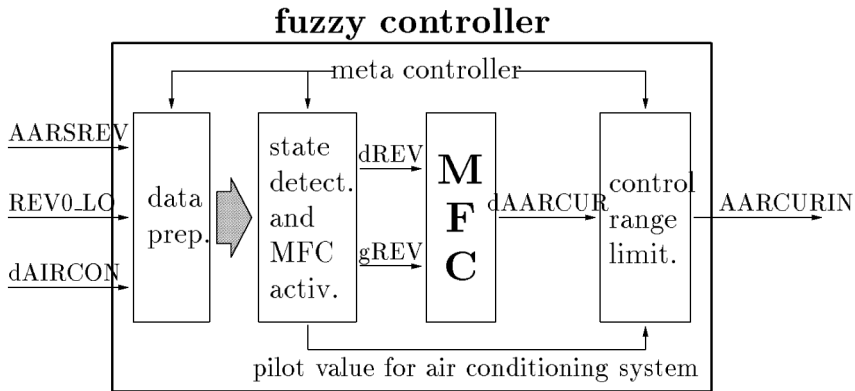


# Beispiel — Leerlaufdrehzahlregelung

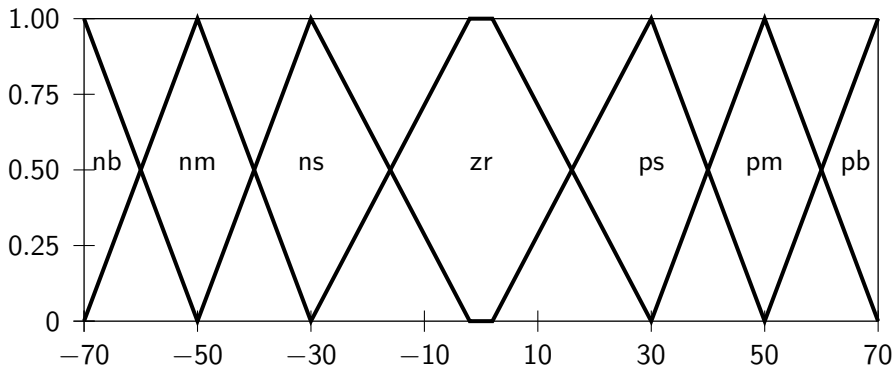
## VW 2000cc 116-PS-Motor (Golf GTI)



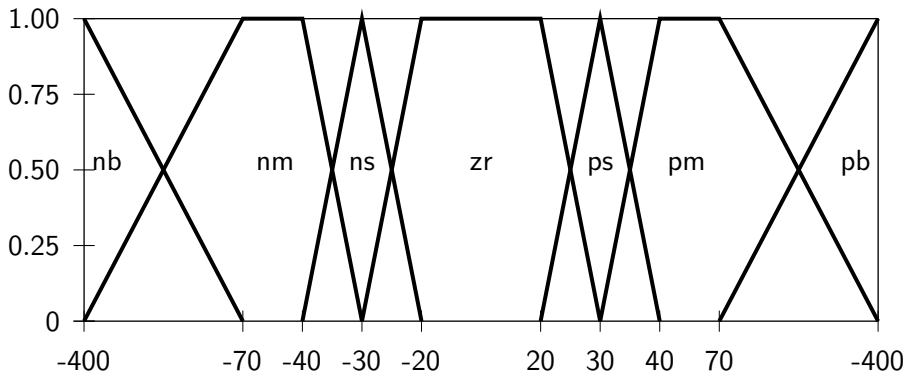
# Struktur des Fuzzy-Reglers



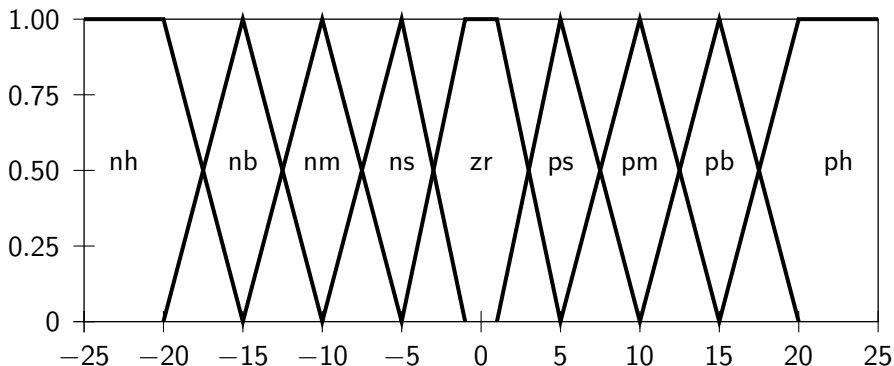
# Abweichung der Drehzahl (dREV)



# Gradient der Drehzahl (gREV)



# Änderung des Stroms der Zusatzluft (dAARCUR)



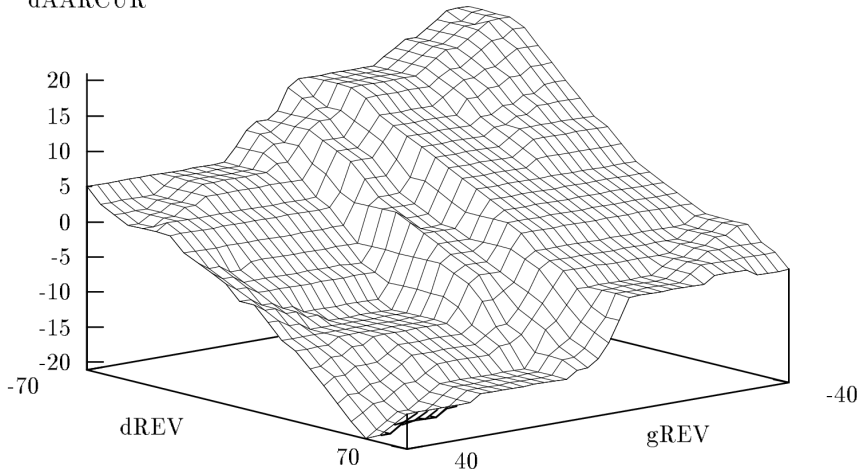
# Regelbasis

Falls die Abweichung von der gewünschten Drehzahl negativ klein **und** der Gradient negativ mittel sind,  
**dann** sollte die Änderung des Stroms der Zusatzluft positiv mittel sein.

		gREV						
		nb	nm	ns	az	ps	pm	pb
dREV	nb	ph	pb	pb	pm	pm	ps	ps
	nm	ph	pb	pm	pm	ps	ps	az
	ns	pb	pm	ps	ps	az	az	az
	az	ps	ps	az	az	az	nm	ns
	ps	az	az	az	ns	ns	nm	nb
	pm	az	ns	ns	ns	nb	nb	nh
	pb	ns	ns	nm	nb	nb	nb	nh

# Kennfeld

dAARCUR



## Beispiel — Automatisches Getriebe

VW-Getriebe mit zwei Modi (eco/sport), war bis 1995 in Serie

Forschungsziele seit 1991:

- individuelle Anpassung der Einstellpunkte
- keine zusätzlichen Sensoren

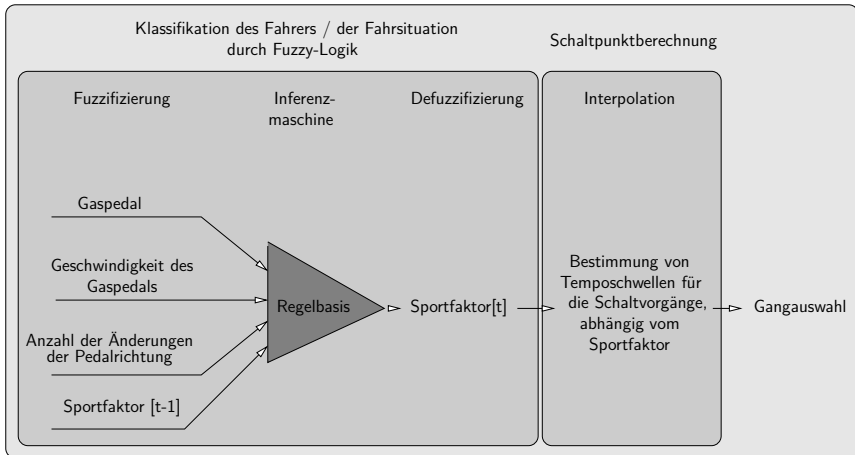
Idee: Auto „beobachtet“ Fahrer und klassifiziert ihn automatisch: ruhig, normal, sportlich (Sportfaktor), nervös (Beruhigung)

Test-Auto:

- verschiedene Fahrer, Klassifikation durch Passagier (Experte)
- gleichzeitige Messung von: Geschwindigkeit, Position und Beschleunigung des Gaspedals, Kickdown, Lenkeinschlag, ... (insgesamt 14 Attribute)



# Selbstanpassendes Getriebe im VW New Beetle (1995)



## Technische Details

Mamdani-Regler mit 7 Regeln

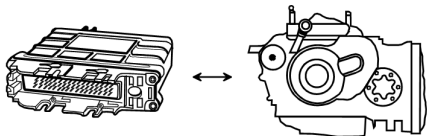
optimiertes Steuerprogramm

- 24 Byte RAM
- 702 Byte ROM
- jeweils in Steuereinheit (Digimat)




Laufzeit 80 ms

- 12x pro Sekunde wird neuer Sportfaktor errechnet

in Serienfertigung seit 1996



## Weiterführende Literatur

-  Höppner, F., Klawonn, F., Kruse, R., and Runkler, T. (1999).  
*Fuzzy Cluster Analysis: Methods for Classification, Data Analysis and Image Recognition.*  
John Wiley & Sons Ltd, New York, NY, USA.
-  Kruse, R., Borgelt, C., Braune, C., Moewes, C., and Steinbrecher, M. (2015).  
*Computational Intelligence: Eine methodische Einführung in Künstliche Neuronale Netze, Evolutionäre Algorithmen, Fuzzy-Systeme und Bayes-Netze.*  
Springer Vieweg, Wiesbaden.
-  Michels, K., Klawonn, F., Kruse, R., and Nürnberger, A. (2003).  
*Fuzzy Regelung: Grundlagen, Entwurf, Analyse.*  
Springer-Lehrbuch. Springer, Berlin / Heidelberg, Germany.

