Intelligente Systeme WS 09/10

Prof. Dr. R. Kruse, Ch. Moewes, G. Ruß

9. Übungsblatt

Aufgabe 32 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

a) Vier Kugeln werden der Reihe nach auf vier Kästen verteilt, wobei alle 4^4 Reihenfolgen gleichwahrscheinlich sein mögen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Kasten genau drei Kugeln enthält, wenn die ersten beiden Kugeln in verschiedene Kästen gelegt werden?

b) Über eine bestimmte Familie sei bekannt, daß sie zwei Kinder hat. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß beide Kinder Mädchen sind, wenn bekannt ist, daß mindestens ein Kind ein Mädchen ist?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit in Teilaufgabe b), wenn bekannt ist, daß das jüngere Kind ein Mädchen ist?

Aufgabe 33 Stochastische Unabhängigkeit

a) Ein Glücksrad habe 36 numerierte Sektoren (Zahlen 1 bis 36). Die Sektoren seien folgendermaßen rot (R) oder blau (B) gefärbt:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
R	R	R	R	R	B	B	B	B	R	R	R	R	B	B	B	B	B
36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19

Wir betrachten die drei Ereignisse

A : das Glücksrad hält in einem roten Sektor,
B : das Glücksrad hält in einem Sektor mit einer geraden Zahl,
C : das Glücksrad hält in einem Sektor mit einer Zahl ≤ 18.

Zeigen Sie, daß die Ereignisse paarweise, aber nicht vollständig[1] unabhängig sind!

b) Zwei faire Würfel, ein roter und ein weißer, werden geworfen. Wir betrachten die drei Ereignisse

A : der rote Würfel zeigt eine 1 oder eine 2,
B : der weiße Würfel zeigt eine 3, 4 oder 5,
C : die Summe der Augenzahlen ist 4, 11 oder 12.

Zeigen Sie, daß die Ereignisse vollständig, aber nicht paarweise unabhängig sind!

[1] Als vollständig unabhängig sei hier nur der Fall $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ verstanden.

Aufgabe 34 Der Bayessche Satz

a) Ein Wettersatellit sendet eine binär kodierte Beschreibung eines sich entwickelnden Sturmes. Durch unvermeidliches Rauschen, z.B. durch den Sturm verursachte atmosphärische Störungen, wird jedoch ein gewisser Übertragungsfehler hervorgerufen. Angenommen, die Nachricht besteht zu 70% aus Nullen und die Wahrscheinlichkeit, daß ein gesendetes Bit korrekt empfangen wird, betrage 80%: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Null gesendet wurde, wenn eine Eins empfangen wird?

b) Etwa 5 von 100 Männern und etwa 25 von 10 000 Frauen sind farbenblind. Eine farbenblinde Person werde zufällig ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß diese Person ein Mann ist?

Aufgabe 35 Der Bayessche Satz

a) In einer gegebenen Population leiden 2 % aller Menschen an einer bestimmten Krankheit. Ein Test habe die Eigenschaft, daß er bei Kranken in 95 % und bei Gesunden in 99 % aller Fälle die richtige Diagnose stellt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Person, bei der auf Grund des Tests die Krankheit (nicht) diagnostiziert wird, auch tatsächlich (nicht) an dieser Krankheit leidet?

b) Gegeben seien zwei Urnen. Urne 1 enthalte zwei weiße und eine rote Kugel, Urne 2 eine weiße und zwei rote. Es werde zuerst zufällig eine Kugel aus Urne 1 gezogen und in Urne 2 gelegt. Anschließend wird zufällig eine Kugel aus der Urne 2 gezogen. Angenommen, die aus Urne 2 gezogene Kugel sei rot: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die aus Urne 1 in Urne 2 überführte Kugel weiß war?

Aufgabe 36 Wahrscheinlichkeiten: Dreier-Duell

A, B und C treten in einem Pistolenduell gleichzeitig gegeneinander an. A ist der schlechteste Schütze: Seine Chance, sein Ziel zu treffen, beträgt 0.3. Die Chance von C beträgt 0.5, wogegen B sein Ziel nie verfehlt. Die drei schießen in der Reihenfolge A, B, C, A, … reihum auf einen von ihnen frei gewählten Gegner (aber wer getroffen ist, scheidet aus und kommt auch nicht mehr als Ziel in Frage), bis nur noch einer der drei übrig ist. Was ist die beste Strategie für A?