

11. Übungsblatt

Aufgabe 40 Convolution

In der Bildverarbeitung werden Graustufenbilder oft als zweiparametrische Funktion $f(x, y)$ dargestellt und als Matrix beschrieben. Dabei sind x und y die Koordinaten eines Bildpunktes und der Funktionswert / Zellwert gibt die Helligkeit an.

Das folgende Bild ist in Graustufen gegeben:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 10 & 10 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 10 & 10 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Convolutional Neural Networks sind in der Lage effizient Bilddaten unabhängig von Rotation und Position enthaltener Objekte zu verarbeiten. Hierfür werden Kernel verwendet, welche jeweils mit Ausschnitten der Matrix verrechnet werden. Die auf diese Weise berechneten Convolved Features können zur Erkennung von Objekten verwendet werden.

Der Sobel-Operator dient der Kantenerkennung in Bilddaten. Nimmt man an, dass bei einer Kante die Helligkeit stark wechselt, so kann man Kanten an den Extremwerten der ersten Ableitung der Funktion f erkennen. Gegeben seien die Operatoren S_x und S_y .

$$S_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad S_y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

- a) Berechnen Sie die Features G_x und G_y durch ausschnittsweise Multiplikation der Operatoren S_x und S_y mit der Matrix A .

$$G_x = S_x * A$$

$$G_y = S_y * A$$

- b) Aus den richtungsabhängigen Matrizen soll jetzt eine richtungsunabhängige Matrix G erstellt werden. Dafür werden die Einträge von G_x und G_y jeweils quadriert, dann aufsummiert und aus dem Ergebnis die Wurzel gezogen.

$$G = \sqrt{G_x^2 + G_y^2}$$

Berechnen sie die Matrix G mit Hilfe der Teilergebnisse aus Aufgabenteil a) und beschreiben sie das Endergebnis!

Aufgabe 41 Vapnik-Chervonenkis-Dimension

- a) Informieren Sie sich über die Vapnik-Chervonenkis-Dimension (VC-Dimension). Was besagt diese Größe und warum spielt sie für das Erlernen einer Funktion aus Datenpunkten (z.B. durch ein neuronales Netz) eine Rolle?
- b) Wie groß ist die VC-Dimension einer Hyperebene im Raum \mathbb{R}^n ? Verdeutlichen Sie Ihre Überlegungen mit Beispielen für $n = 2$.
- c) Die Indikatorfunktion $I(f(x))$ ist definiert als 1, falls $f(x) > 0$, und -1 sonst. Zeigen Sie, dass die Menge der Funktionen $\{I(\sin(\alpha x) > 0)\}$ die folgenden Punkte im eindimensionalen Raum für beliebige l trennen kann:

$$z_1 = 10^{-1}, \dots, z_l = 10^{-l}.$$

Das heißt, zeigen Sie, dass die VC-Dimension dieser Klasse von Funktionen unendlich ist. Hinweis: Es genügt dazu

$$\alpha = \pi \left(1 + \sum_{i=1}^l \frac{(1 - y_i) 10^i}{2} \right)$$

geschickt zu wählen und zu zeigen, dass für beliebige $l \in \mathbb{N}$ und beliebige Labels

$$y_k \in \{-1, 1\}, \forall 1 \leq k \leq l$$

die Indikatorfunktion das gewünschte Label liefert.

Aufgabe 42 Kernel-Trick

- a) Informieren Sie sich über den sogenannten Kernel-Trick. Was besagt er und wo kommt er zum Einsatz?
- b) Wie kann das Optimierungsproblem einer linearen SVM angepasst werden, um auch nicht-lineare Lösungen zu finden?